

## TD 8 - Preuve de programmes

Semaine du 21 novembre 2022

### Exercice 1

Dériver les triplets de Hoare suivants en utilisant les règles d'inférence introduites dans le cours. Rappel : toutes les variables sont des entiers.

1.  $\vdash \{x \leq 0\} y := x+2 \{y \leq 2\}$
2.  $\vdash \{x \leq 0\} x := x-1 \{x < 0\}$
3.  $\vdash \{x \geq 0\} \text{WHILE } x \geq 0 \text{ DO } x := x-1 \{x = -1\}$
4.  $\vdash \{a = x \wedge b = y\} a := a + b; b := a - 2*b; a := a * b \{a = x^2 - y^2\}$
5.  $\vdash \{i = 8\} \text{WHILE } i < 5 \text{ DO } i := 2*i \{i \geq 5\}$

### Exercice 2

On considère le programme `Prog` suivant :

```
IF x > y
THEN max := x
ELSE max := y
```

Quelles sont les pré et post-conditions de ce programme ? Démontrer la validité du triplet de Hoare correspondant.

### Exercice 3

On considère le programme `Prog` suivant :

```
WHILE y != x DO
  x := x - 1;
  y := y - 2;
```

1. Quelles sont les pré et post-conditions de ce programme ?
2. Quel est l'invariant de la boucle ?
3. Démontrer la validité du triplet de Hoare correspondant à ce programme.
4. Donner un variant pour la boucle `WHILE`, c'est-à-dire une expression toujours positive et qui décroît strictement à chaque tour de boucle.

#### Exercice 4

On veut prouver que le programme suivant calcule  $X^N$  pour  $N \geq 0$ .

```
S := 1;
P := N;
WHILE P >= 1 DO
  S := S * X;
  P := P - 1;
```

1. Écrire la spécification du programme sous forme de pré et post-conditions.
2. Quel est le triplet de Hoare à prouver ?
3. Trouver un invariant pour la boucle WHILE, puis donner la preuve de la deuxième partie du programme.
4. Donner la preuve de la première partie du programme  $S:=1$ ;  $P:=N$  pour terminer la preuve du programme.
5. Donner un variant pour la boucle WHILE.

#### Calcul de Hoare

$$\frac{}{\vdash \{P\} \text{ SKIP } \{P\}} \textit{skip}$$

$$\frac{}{\vdash \{P[x \mapsto E]\} x := E \{P\}} \textit{assign}$$

$$\frac{\vdash \{P \wedge \textit{cond}\} c \{Q\} \quad \vdash \{P \wedge \neg \textit{cond}\} d \{Q\}}{\vdash \{P\} \text{ IF } \textit{cond} \text{ THEN } c \text{ ELSE } d \{Q\}} \textit{if}$$

$$\frac{\vdash \{P \wedge \textit{cond}\} c \{P\}}{\vdash \{P\} \text{ WHILE } \textit{cond} \text{ DO } c \{P \wedge \neg \textit{cond}\}} \textit{while}$$

$$\frac{P \rightarrow P' \quad \vdash \{P'\} c \{Q'\} \quad Q' \rightarrow Q}{\vdash \{P\} c \{Q\}} \textit{cons}$$

$$\frac{}{\vdash \{\textit{false}\} c \{P\}} \textit{falseE}$$

$$\frac{\vdash \{P\} c \{Q\} \quad \vdash \{Q\} d \{R\}}{\vdash \{P\} c; d \{R\}} \textit{seq}$$